Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

семинары для студентов 2 курса

Теория функции комплексного переменного

Семестр 2, занятие 11

Вычеты

ТФКП, ЗАНЯТИЕ 11, ВЫЧЕТЫ.

1. Что такое вычет и для чего он нужен?

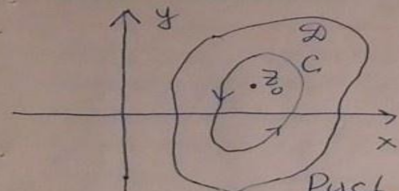


Рис.1

Пусть в области D $f(z)$ аналитична всюду, кроме точки z_0, а з. контур C лежит внутри D и содержит внутри себя точку z_0 (рис.1) Тогда $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана с центром z_0:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \quad (1)$$

Опр 1 Вычетом $f(z)$ относительно z_0 назыв. значение $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$ (2). Обозначения вычета: $\operatorname{res}\limits_{z=z_0} f(z)$, либо $\operatorname{Res}(f(z), z_0)$.

Как нетрудно видеть, значение вычета не зависит от выбора контура C, лишь бы он проходил так, как на рис.1. Почему?

Th1 $\operatorname{res}\limits_{z=z_0} f(z) = C_{-1}$ в ряде Лорана (3)

Замечание. Исходя из th 1, можно дать другое определение вычета, эквивалентное Опр 1:

Опр 2 $\operatorname{res}\limits_{z=z_0} f(z) = C_{-1}$

Доказательство Окружим точку z_0 окружностью радиуса ρ. так, чтобы она лежала внутри C (рис.2). Тогда $f(z)$ аналитическая в заштрихованной области, и

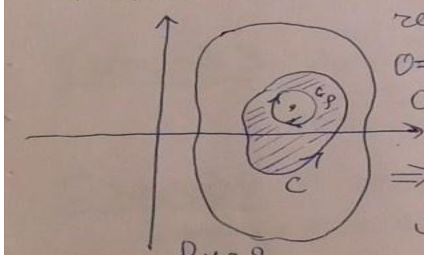


Рис.2

$$0=\oint_{C\cup C_\rho} f(z)\,dz=0=\oint_{C} f(z)\,dz+\oint_{C_\rho} f(z)\,dz \Rightarrow$$

C (интегр. против час. стрелки) C_ρ (интегр. по час. стрелке)

$$\Rightarrow \oint_{C} f(z)\,dz = \oint_{C_\rho} f(z)\,dz = \oint_{C_\rho}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n\Big)dz =$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \oint_{C_\rho}(z-z_0)^n dz = \left\{\begin{matrix} z-z_0=\rho e^{i\varphi} \\ dz=\rho i e^{i\varphi}d\varphi \\ 0<\varphi<2\pi \end{matrix}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i C_n \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}\rho^{(n+1)}\,d\varphi = 2\pi i C_{-1}$$

все остальные инт. $=0$. Док.

Итак, если z_0 — единств. изол. особая точка, то

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)} \quad (3)$$

Если же изолированных особых точек несколько, то за счёт перегородок контур C можно представить в виде объединения "простых" контуров, причем интегралы по перегородкам взаимно уничтожаются (рис. 3), и мы получаем формулу:

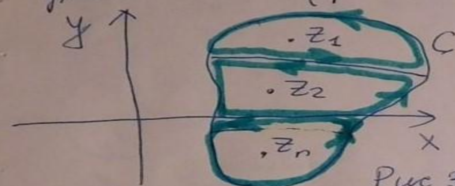


Рис 3

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)} \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) дают эффективный метод вычисления интегралов, при условии, что мы научимся считать вычеты.

2. Как можно считать вычеты?

Способ 1 Исходя из th1, $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}$ (5)
(C_{-1} — коэф-т в ряде Лорана (1)). Этот способ далеко не самый экономичный.

Способ 2 Пусть z_0 — полюс 1 порядка, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right) \quad (6)$$

Способ 3 Пусть z_0 — полюс m-го порядка, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)} \quad (7)$$

[производ. по $m-1$

Способ 4 В частности, если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ — аналитическая в точке z_0, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\,\varphi^{(m-1)}(z_0) \quad (8)$$

(ф-ла (8) прямо следует из (7))

(Докажите ф-лы (6)-(8) с помощью разл. $f(z)$ в ряд Лорана)

3. Вычет относительно точки $z=\infty$

Существует несколько эквивалентных определений вычета $f(z)$ относительно точки $z_0=\infty$:

1) $\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -C_{-1}$, где C_{-1} – коэф-т в ряде Лорана в разложении $f(z)$ относительно $z_0=\infty$; **(9)**

2) $\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R} f(z)\,dz$, где R такое, что все прочие особые точки внутри круга $|z|=R$ (рис 4)

$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R} f(z)\,dz$ **(10)**

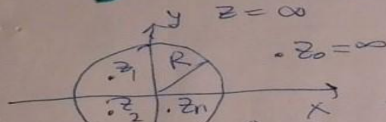


Рис 4

3) Если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, то

$$\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -\lim_{|z|\to\infty} z\cdot f(z) \quad \textbf{(11)}$$

4) Если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=C\neq\infty$, то

$$\operatorname{res} f(z) = -\lim_{|z|\to\infty} \left(z\left(f(z)-C\right)\right) \quad \textbf{(12)}$$

Из **(11)** следует утверждение:

Утв 1 Если $f(z) \sim \frac{1}{z^m}$ при $z\to\infty$, где $m\in N$, $m>1$,

то $\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = 0$ **(13)**

Зачем нужно считать $\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z)$? Справедлива теорема: Если $f(z)$ аналитическая всюду, кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то

$$\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z) = 0 \quad \textbf{(14)}$$

Формула **(14)** позволяет упростить вычисления интегралов, когда внутри контура C много особых точек (рис. 5)

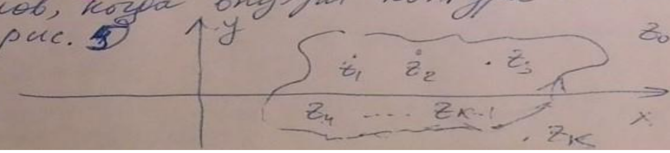


Рис 5

Задача 12.9

1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ ← обе точки – полюсы 1 порядка, поэтому

$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\left((z-1)f(z)\right) = \lim_{z\to 1}\dfrac{1}{z-2} = -1;$

$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2}\left((z-2)(f(z))\right) = \lim_{z=2}\dfrac{1}{z-1} = 1;$

$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$, так как $f(z)\sim\dfrac{1}{z^2}$ при $z\to\infty$ и $C_{-1}=0$.

---

2) $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$

z_1 – полюс порядка m;
z_2 – полюс 1-го порядка;
$z_0=\infty$ – регул. точка

$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = $ (см. ф-лу (8)) $= \dfrac{1}{(m-1)!}\left(\dfrac{1}{z-z_2}\right)^{(m-1)}\Bigg|_{z=z_1} =$

$= \dfrac{1}{\cancel{(m-1)!}}(-1)^{m-1}\cancel{(m-1)!}\,\dfrac{1}{(z_1-z_2)^m} = \dfrac{-1}{(z_2-z_1)^m};$

$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \dfrac{1}{(z_2-z_1)^m};$ Comment Видно, что $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = 0$

$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$, т.к. $f(z)\sim\dfrac{1}{z^{m+1}}$ при $z\to\infty$

---

5) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z};$

а) Исследуем сначала точку $z=0$? При $z\to 0$ получим

$f(z)=\dfrac{z-(e^z-1)}{(e^z-1)z} = \dfrac{z-(1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots-1)}{(1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots-1)z} = \dfrac{-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}\dots}{z^2+\frac{z^3}{3!}+\dots} \to -\dfrac{1}{2}$ при $z\to 0$,

то есть $z=0$ – устранимая особая точка, $f(z)$ можно доопределить в нуле до аналитической ф-ции.

б) Для $z\neq 0$ ф-ция $\frac{1}{z}$ уже не имеет особых точек $\Rightarrow$ надо искать корни уравнения $e^z=1$

$\Rightarrow e^{x+iy}=1 \Leftrightarrow e^x(\cos y+i\sin y)=1 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=2\pi k i\end{cases} \Rightarrow z_k = 2\pi k i$

– особые точки (полюсы 1 порядка) $\Rightarrow$

$\operatorname*{Res}_{z=2\pi k i} f(z) = \lim_{z\to 2\pi k i}\dfrac{z-2\pi k i}{e^z-1} = 1$ (вычислите этот предел)

<u>Ответ:</u> $\operatorname*{Res}_{z=2\pi k i} f(z) = 1$, где $k=\pm1,\pm2,\dots$

9) $f(z)=\frac{1}{\cos z-3}$. Особые точки $f(z)$ — корни уравнения $\cos z=3$, они — полюсы 1 порядка (докажите!)

Решим ур-ние $\cos z=3 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=3 \Leftrightarrow \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}=3$

$\Leftrightarrow e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)=6 \Leftrightarrow$

$\begin{cases}(e^y+e^{-y})\cos x=6\\(e^y-e^{-y})\sin x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(e^y+e^{-y})\cos\pi k=0\\ \sin x=0 \Rightarrow x=\pi k\end{cases} \Rightarrow k=2n \Rightarrow \begin{cases}e^y+e^{-y}=6\\x=2\pi n\end{cases} \Leftrightarrow$

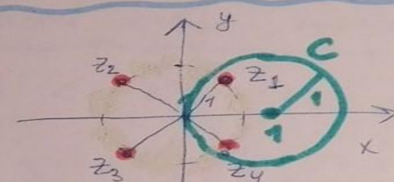
$\Leftrightarrow \begin{cases}e^{2y}-6e^y+1=0\\x=2\pi n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\pi n\\e^y=3\pm2\sqrt2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\y=\pm\ln(3+2\sqrt2)\end{cases}$ — полюса 1 порядка $\Rightarrow$

$\operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z)=\lim\limits_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{\cos z-3}=\frac{1}{\sin z_n}=\pm\frac{i}{2\sqrt2}$ ← Ответ

Задача 12.11

1) $\oint\limits_C \frac{dz}{z^4+1}=?$

$C: |z-1|=1$



$z^4+1=0$

$z^4=-1=e^{i\pi}$

$z=e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{4}}=$

$=\begin{cases}e^{i\pi/4}=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{i\sqrt2}{2}=z_1\\ e^{i\frac{3\pi}{4}}=-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{i\sqrt2}{2}=z_2\\ e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}=z_3\\ e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{i\sqrt2}{2}=z_4\end{cases}$

Видно, что точки z_1, z_4 попадают внутрь контура C, а точки z_2, z_3 — нет (докажите), поэтому $\oint\limits_{|z-1|=1} f(z)\,dz=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=z_4} f(z)\right)=$

$=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}+\operatorname*{res}_{z=z_4}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}\right)=$

$=\left(\text{точки — полюсы 1 порядка!}\right)=2\pi i\left(\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}+\frac{1}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)}\right)=$

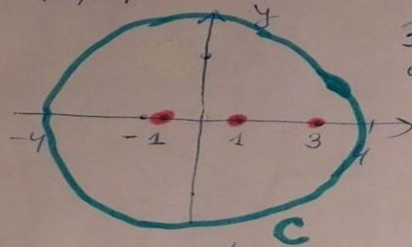
$=\frac{2\pi i}{\underset{\sqrt2}{\underset{\parallel}{z_1-z_4}}}\left(\frac{1}{(z_1-z_2)\underset{\parallel\ i\sqrt2}{(z_1-z_3)}}-\frac{1}{(z_4-z_2)(z_4-z_3)}\right)=\pi\left(\frac{1}{z_1-z_3}-\frac{1}{z_4-z_2}\right)=$

$=\pi\left(\frac{1}{(1+i)\sqrt2}-\frac{1}{(1-i)\sqrt2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt2}\cdot\frac{(1-i)-(1+i)}{2}=\frac{-2\pi i}{2\sqrt2}=\boxed{-\frac{\pi i}{\sqrt2}}$ ← Ответ

2) $\oint\limits_C\frac{dz}{z^4+1}$, где C: $x^2-xy+y^2+x+y=0$. Как определить, какие из $z_{1,2,3,4}$ попадают внутрь, а какие нет? При $z\to\infty$ $x^2+y^2-xy+x+y\to+\infty$, поэтому если $h(z)=x^2+y^2-xy+x+y>0$, то мы вне контура, если <0 — то внутри. Подставить координаты точек z_1, z_2, z_3, z_4

[докажите через дискриминант выражения x^2+y^2-xy

5) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = \oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)^2} = ?$



Здесь как раз тот случай, когда все особые точки внутри контура C, а поэтому лучше всего воспользоваться ф-лой (14)

$\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) + \sum_{k=1}^{3} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z) = 0$, то

$f(z) \sim \frac{1}{z^6}$ при $z \to \infty$, поэтому $\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = 0$, и сам интеграл тоже равен нулю. Ответ: 0

6) $\oint\limits_{C} \sin\frac{1}{z}\, dz$, где $C: |z| = r,\ r > 0$.

Comment: точка $z=\infty$ внутрь контура не входит, поэтому она нам не нужна

Функция $f(z)$ имеет единств. особую точку $z=0$, поэтому

$\oint\limits_{C} \sin\frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \underset{z=0}{\operatorname{res}} \sin\frac{1}{z} = \Big(\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \dots$

поэтому $C_{-1} = 1 \Rightarrow \underset{z=0}{\operatorname{res}} \sin\frac{1}{z} = 1 \Big) = 2\pi i$ Ответ: $2\pi i$

Задача 12.12.

$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi =$

{ Сделаем замену: на ед. окр-ти, $|z|=1$
$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
$\frac{1}{z} = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$
поэтому:
$\cos\varphi = \left(z + \frac{1}{z}\right)/2$
$\sin\varphi = \left(z - \frac{1}{z}\right)/2i$
$dz = ie^{i\varphi}d\varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}$ }

$= \oint\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)}{iz}}_{= f(z)} dz =$

$= \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} f(z)\, dz =$

$= 2\pi \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z)$, где z_k – те точки, что попали внутрь единичного круга.